



TITLE:

THE RELATION BETWEEN THE EXTRAPOLATION ESTIMATES (Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations)

AUTHOR(S):

曾布川, 拓也

CITATION:

曾布川, 拓也. THE RELATION BETWEEN THE EXTRAPOLATION ESTIMATES (Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations). 数理解析研究所講究録 2004, 1388: 54-65

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25805>

RIGHT:

THE RELATION BETWEEN THE EXTRAPOLATION ESTIMATES

曾布川拓也 (TAKUYA SOBUKAWA)

岡山大学・教育学部
Faculty of Education, Okayama University

Abstract. We know many operators which is bounded on L^p ($p > 1$) but on L^1 not. For such operators, especially, the Yano-type operators, we have known several extrapolation theorem on L^p spaces over infinite measure spaces. In this note, we shall show the equivalence between them.

1. INTRODUCTION AND RESULT

(Ω, μ) を σ -有限測度空間とする。実解析で扱う作用素で, L^p 有界 ($1 < \forall p < 2$) であるが, L^1 有界でないものはたくさん知られている。たとえば, Hilbert 変換・Riesz 変換, さらに一般の Calderon-Zygmund 型の特異積分作用素, Hardy-Littlewood 型などの極大関数, 多重ウィナー積分作用素などがこの条件を満たす。こうした作用素に対しては L^1 有界性は求められないが, L^1 評価に “近い” ものを求める, たとえばその「近いもの」として

- (1) 作用素の定義域として, L^1 より狭い Hardy Class H^1 を用いる
- (2) 作用素の値域として, L^1 より広い弱 L^1 Class を用いる

等の方法が良く知られている。

ところで上に挙げたものはもとより, そのような作用素の多くは次の条件を満たす。

Yano's condition. $1 < p_1 < \infty$ とする。

- (1) T は劣加法的, すなわち $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$ a.e. が成り立つ
- (2) T は L^p 有界 ($1 < \forall p \leq p_1$) であり, さらに,

$$(1.1) \quad \left[\int_{\Omega} |Tf(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{1/p}.$$

という評価を満たす (A および α は p や f に依存しない)。

このような作用素に対して, S.Yano (矢野茂樹) は対象とする測度空間が有限のときに, 次のような評価が成り立つことを証明した。

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B99, 46E30; Secondary 46B70.
Key words and phrases. Extrapolation theorem, Lorentz class, Orlicz class.

Fact 0([10]).

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} |Tf(x)| d\mu(x) \leq B \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} + C\mu(\Omega)$$

この評価は $\mu(\Omega) = \infty$ のときには右辺第2項が発散するので意味がない。そしてその場合にはこのような $L \log^{\alpha} L \rightarrow L^1$ 評価も成り立たないことが知られている。

そこで、 $\mu(\Omega) = \infty$ のときに L^1 に“近い”評価として筆者は次のようなものを求めた。

Fact 1([9]). 任意の $1 < q < p_1$ に対して

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \int_{|Tf| \leq 1} |Tf(x)|^q d\mu(x) + \int_{|Tf| > 1} |Tf(x)| d\mu(x) \\ & \leq \frac{C_A}{(q-1)^{\alpha}} \left[\int_{|f| \leq 1} |f(x)|^q d\mu(x) + \int_{|f| > 1} |f(x)| (1 + \log |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \right] \end{aligned}$$

が成り立つ。

この評価は L^1 の“近く”というには語弊があるが、B.Jawerth - M.Milman の抽象的な補外空間によれば、 $\mu(\Omega) = 1$ のときに $L^1(\Omega) = \bigcup_{p>1} L^p$ 、言い方を変えれば、 L^1 は一番「広い」クラスであり、矢野の結果はその「広い」空間における評価式と見ることができる。 $\mu(\Omega) = \infty$ のときには $\bigcup_{1 < p < q} L^p = L^1 + L^q$ なのでそれに対応した評価式がこの結果である。

この評価では、 $q = 1$ とすることは出来ないことが反例を持って知られているが、それに代わるものとして筆者は次の評価を得た。

Fact 2 ([8]).

$$(1.4) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_{|Tf| \leq 1} \frac{|Tf(x)|}{(1 - \log |Tf(x)|)^{\alpha + \varepsilon}} d\mu(x) + \int_{|Tf| > 1} |Tf(x)| d\mu(x) \\ & \leq C_{q,A} \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{|f| \leq 1} \frac{|f(x)|}{(1 - \log |f(x)|)^{\varepsilon}} d\mu(x) + \int_{|f| > 1} |f(x)| (1 + \log |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \right] \end{aligned}$$

が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

この評価式において $\varepsilon = 0$ とできないことは知られているが、両辺の $(1 + \log |f|)^{\varepsilon}$ の部分を、 $(1 + \log(1 + \log |f|))^{1+\varepsilon}$ のオーダーに置き換えることは出来る。同様に \log の階数を上げた精密なものに切り替えることはできるが、“任意の $\varepsilon > 0$ ” という「不定の」部分を完全に無くしてしまうことはできない。

一方、(1.3) の右辺で $q = 1$ とおいてしまって左辺を変える、すなわち作用素 T の定義域を $L \log^{\alpha} L$ に固定して次のような評価が得られている。

Fact 3.

$$(1.5) \quad \sup_{r>0} \frac{\int_{\Omega} (|Tf(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1 + \log^+ r)^\alpha} \leq C \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

この評価は初め, M.Carro ([2]) によって, 普通の劣線形性 (Yano の条件にさらに $|T(\lambda f)| = |\lambda Tf|$, a.e. を加える) を仮定し, L^p 有界性を少し弱めた条件の下で証明された. A.Gogatishvili と筆者は上の Yano の条件のもとで, 同じ評価を得た ([5]).

またこれとよく似た次の評価も得られる。

Fact 4.

$$(1.6) \quad \sup_{0 < t < \infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1 + \log^+ t)^\alpha} \leq \int_0^\infty (1 + \log^+ \frac{1}{t})^\alpha f^*(t) dt,$$

これは M.Carro と J.Martin によって (1.5) と同様の条件下で証明されている ([4]). その証明は, 抽象的な補間空間論を用いており, さらに一般的な結果も示されている。

本論文ではまずこの (1.6) を Yano の (より少し弱い) 条件下で初等的に証明する (§2). ついで, ここに上がっている 4 つの補外評価について, それら相互の関係が次のようになることを示す。

Claim.

$$(1.4) \iff (1.3) \implies (1.5) \iff (1.6)$$

である。さらに

$$L^q \text{ 有界性} \& (1.6) \implies (1.3)$$

という補間定理が成り立つ。

これにより, 知られているこれらの 4 つの補外評価の関連が明らかになる。

(1.3) \implies (1.4) は [8] で示されている。そこで, (1.3) \implies (1.5) を §3 で, (1.5) \iff (1.6) を §4 で, そして最後にこの補間定理を証明する。

2. ALMOST POINTWISE DECOMPOSITION とその応用

この章では Yano's condition が成り立つ作用素が (1.6) を満たすことを証明する。まず Lorentz Class の定義とその性質を挙げる。

Definition. 測度空間 (Ω, μ) 上の可測関数 f に対して

$$\begin{aligned} \lambda_f^\mu(\sigma) &= \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\}) \\ f^*(t) &= \inf\{\sigma \geq 0 : \lambda_f^\mu(\sigma) \leq t\} \\ f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \end{aligned}$$

をそれぞれ f の分布関数, 再配列, および平均再配列と呼ぶ。

これらを用いて, 次のような関数の族が定義される。

Definition. $0 < p < \infty, 0 < q < \infty$ に対して

$$L^{p,q}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,q} = \left[\frac{q}{p} \int_0^{\mu(\Omega)} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

$$L^{(p,q)}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{(p,q)} = \left[\int_0^{\mu(\Omega)} (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

また

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t)) \right\}$$

$$L^{(p,\infty)}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)) \right\}$$

これらのクラスについて次の関係が成り立つ。

Proposition 2.1. 任意の $1 \leq p < \infty$ に対して

$$L^{p,1} \subset L^{p,p} = L^p \subset L^{(p,\infty)}$$

が成り立つ。さらにこれらの埋め込みは縮小写像である。

Proof. 次の不等式を示す。

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) &\leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} |f^*(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{1}{p}} |f^*(t)|^p \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

まず, Hölder の不等式から

$$t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \left(\int_0^t f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \cdot t^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^t f^*(s)^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

と最初の不等式を得る。次の等式は, 再配列の定義から求められる。

また, 単純関数 f が,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x),$$

$(|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_n|, E_1, E_2, \dots, E_n \text{ は可測集合})$ と表されるならば, その再配列 f^* は

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[t_{i-1}, t_i)}(t), = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[0, t_i)}(t),$$

($t_0 = 0, t_i = \mu(E_i), c_i = a_i - a_{i+1}$) となる。そこでこのような f については

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,p} &= \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[0,t_i)} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{i=1}^n c_i \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,t_i)} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\int_0^{t_i} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n c_i t_i^{\frac{1}{p}} = \int_0^{\mu(\Omega)} \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[0,t_i)} \frac{dt}{t} \\ &= \|f\|_{p,1}\end{aligned}$$

となる。

この章で示すのは次の定理である。

Theorem 2.2. $\alpha > 0, p_1 > 1$ とする。作用素 T は、測度空間 (Ω, μ) 上の単純関数 f を可測関数 Tf に写像し、半加法的すなわち

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$$

がほとんど至るところで成り立ち、さらに任意の $1 < p < p_1$ に対して 弱 L^p 有界性

$$\|Tf\|_{(p,\infty)} \leq \frac{A}{(p-1)^\alpha} \|f\|_{p,1}$$

を持つとする。このとき、任意の $f \in L \log^\alpha L$ に対して

$$\sup_{0 < t < \infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1 + \log^+ t)} \leq \int_0^\infty (1 + \log^+ 1/t)^\alpha f^*(t) dt$$

が成り立つ。

Remark. この定理の条件は、Yano's Condition よりも弱いものであることが Proposition 2.1 からわかる。

Proof. $f \in L^{p,1}$ とする。このとき、 $f^*(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つ。そこで pairwise disjoint な可測集合の族

$$E_n = \{x \in \Omega : f^*(2^{n+1}) < |f(x)| \leq f^*(2^n)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

を考える。ただし $f^*(2^n) = f^*(2^{n+1})$ ならば $E_n = \emptyset$ とする。このとき 関数 f を

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

と分解する。もちろん $f = \sum_n f_n$ である。このとき、再配列関数の定義から任意の n に対して

$$\mu(E_n) \leq 2^{n+1} |f_n(x)|, \quad |(f_n)^*(t)| \leq f^*(2^n)$$

である。このとき、定理の前提から、任意の $0 < s < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
 s^{\frac{1}{p}}(Tf_n)^{**}(s) &\leq \frac{A}{(p-1)^{\alpha p}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} f_n^*(t) \frac{dt}{t} \\
 &\approx \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2^i)^{\frac{1}{p}} f_n^*(2^i) \\
 &\leq \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{n+1} (2^i)^{\frac{1}{p}} f_n^*(2^i) \\
 &\leq 2 \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^{n+1})^{\frac{1}{p}} f^*(2^n) \leq 4 \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^n)^{\frac{1}{p}} f^*(2^n)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $s = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$ とおくと

$$(Tf_n)^{**}(2^k) \leq 4 \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^n/2^k)^{\frac{1}{p}} f^*(2^n)$$

が任意の $-\infty < k \leq \infty$, $-\infty < n < \infty$ に対して成り立つことがわかる。そこで両辺で p を動かして \inf をとると、

$$(Tf_n)^{**}(2^k) \leq 4 \inf_p \left(\frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^n/2^k)^{\frac{1}{p}} \right) f^*(2^n)$$

さらに n について和を取れば

$$(Tf)^{**}(2^k) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Tf_n)^{**}(2^k) \leq 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \inf_p \left(\frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^{n-k})^{\frac{1}{p}} \right) f^*(2^n)$$

を得る。これを almost pointwise decomposition と呼ぶ。ここで

$$\inf_{1 < p < p_1} \frac{A}{(p-1)^{\alpha}} (2^{n-k})^{\frac{1}{p}} \approx \begin{cases} (k-n)^{\alpha} 2^{n-k} & (n < k) \\ (2^{n-k})^{\frac{1}{p_1}} & (n \geq k) \end{cases}$$

であるから

$$(Tf)^{**}(2^k) \leq \sum_{n=-\infty}^{k-1} (k-n)^{\alpha} 2^{n-k} f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} f^*(2^n) (2^{n-k})^{\frac{1}{p_1}}$$

という評価を得る。この両辺に 2^k をかけて

$$\begin{aligned}
 \sup_{k \leq 0} 2^k (Tf)^{**}(2^k) &\approx \sup_{0 < t < 1} t (Tf)^{**}(t) \\
 &\leq \sup_{k \leq 0} \left[\sum_{n=-\infty}^{k-1} (k-n)^{\alpha} 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} (2^n)^{\frac{1}{p_1}} (2^k)^{\frac{1}{p_1}} f^*(2^n) \right] \\
 &\leq \sup_{k \leq 0} \left[\sum_{n=-\infty}^0 (1-n)^{\alpha} 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} 2^n f^*(2^n) \right] \\
 &\approx \int_0^1 (1 - \log t) f^*(t) dt + \int_1^{\infty} f^*(t) dt
 \end{aligned}$$

を, また $2^k/k$ をかけると

$$\begin{aligned}
\sup_{k \geq 1} \frac{2^k}{k} (Tf)^{**}(2^k) &\approx \sup_{1 \leq t < \infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1 - \log t)} \\
&\leq \sup_{k \geq 1} \left[\sum_{n=-\infty}^{k-1} \left(1 - \frac{n}{k}\right) 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2^k}{k} f^*(2^n) \right] \\
&= \sup_{k \geq 1} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{n}{k}\right) 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=0}^{k-1} \left(1 - \frac{n}{k}\right) 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2^k}{k} f^*(2^n) \right] \\
&\leq \left[\sum_{n=-\infty}^0 (1 - n)^{\alpha} 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f^*(2^n) \right] \\
&\approx \int_0^1 (1 - \log t) f^*(t) dt + \int_1^{\infty} f^*(t) dt
\end{aligned}$$

という評価を得る。これらをあわせて

$$\begin{aligned}
\sup_{0 < t < \infty} \frac{t(Tf)^{**}(t)}{(1 + \log^+ t)} &\approx \sup_{-\infty < k < \infty} 2^k (Tf)^{**}(2^k) \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{k-1} (1 - n)^{\alpha} 2^n f^*(2^n) + \sum_{n=k}^{\infty} 2^k f^*(2^n) \\
&\approx \int_0^{\infty} (1 + \log^+ \frac{1}{t})^{\alpha} f^*(t) dt
\end{aligned}$$

と定理の結論を得る。

3. THE RELATION BETWEEN EXTRAPOLATION THEOREMS AROUND L^1

この章では, (1.3) と (1.5) の関係について述べる。

Proposition 3.1. (Ω, μ) 上の可測関数 f および g が

$$\begin{aligned}
&\int_{|g| \leq 1} |g(x)|^q d\mu(x) + \int_{|g| > 1} |g(x)| d\mu(x) \\
(3.1) \quad &\leq \frac{C_A}{(q-1)^{\alpha}} \left[\int_{|f| \leq 1} |f(x)|^q d\mu(x) + \int_{|f| > 1} |f(x)| (1 + \log |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \right]
\end{aligned}$$

を満たすならば,

$$(3.2) \quad \sup_{r > 0} \frac{\int_{\Omega} (|g(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1 + \log^+ r)^{\alpha}} \leq C \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x)$$

が成り立つ。

Proof. (3.1) の右辺は (3.2) の右辺で押さえられることはすぐにわかる。すると,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < r < 1} \frac{\int_{\Omega} (|g(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1 + \log^+ r)^\alpha} &\leq \int_{|g| > 1} |g(x)| d\nu(x) \\ &\leq C \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^\alpha d\mu(x) \end{aligned}$$

($r \geq 1$) となる。(3.1) で $q = 1 + \frac{p_1-1}{\log r}$ とおけば

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^\alpha d\mu(x) &\geq (q-1)^\alpha \int_{|g| \leq 1} |g(x)|^q d\mu(x) \\ &\geq \left(\frac{p_1-1}{\log r} \right)^\alpha \int_{e^{-\log r} < |g| \leq 1} |g(x)| \cdot |g(x)|^{\frac{p_1-1}{n}} d\mu(x) \\ &\geq (p_1-1)^\alpha \frac{\int_{\frac{1}{r} < |g| \leq 1} |g(x)| \cdot |g(x)|^{\frac{p_1-1}{\log r}} d\mu(x)}{(\log r)^\alpha} d\mu(x) \approx \frac{\int_{\frac{1}{r} < |g| \leq 1} |g(x)|}{(\log r)^\alpha}. \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{\int_{\Omega} (|g(x)| - \frac{1}{r})_+ d\nu(x)}{(1 + \log^+ r)^\alpha} \leq C \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

が $\forall r > 0$ に対して成り立つことがわかる。

4. EQUIVALENCE BETWEEN LORENTZ AND ORLICZ TYPE ESTIMATES

次に (1.4) \longleftrightarrow (1.5) を示す。そのために、これらの評価式の左辺同士、右辺同士を比較する。

Lemma 4.1. (Ω, μ) を σ -有限測度空間, $\alpha \leq 0$ とする。このとき Orlicz-Zygmund クラス

$$(4.1) \quad L \log^\alpha L = \left\{ f : \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log |f(x)|)^\alpha d\mu(x) \right\}$$

と Lorentz-Zygmund クラス

$$(4.2) \quad L^{1,1,\alpha} = \left\{ f : \int_0^\infty f^*(t) (1 + \log^+ \frac{1}{t})^\alpha dt \right\}$$

を考えると, $L \log^\alpha L = L^{1,1,\alpha}$ となる。

Proof. $\mu(\Omega) = 1$ の場合の証明 ([1 Lemma 4.6.7, p.244]) と同様に行う。定義から

$$f^*(t) \leq f^{**}(t) \leq \frac{1}{t} \|f\|_1$$

だから

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \\
 &= \int_0^{\infty} f^*(t) (1 + \log^+ f^*(t))^{\alpha} dt \\
 &\leq \int_0^{\infty} f^*(t) (1 + \log^+ \frac{\|f\|_1}{t})^{\alpha} dt \\
 &= \int_0^{\min(\|f\|_1, 1)} f^*(t) (1 + \log^+ \frac{\|f\|_1}{t})^{\alpha} dt + \int_{\min(\|f\|_1, 1)}^{\infty} f^*(t) dt \\
 &\leq \int_0^1 f^*(t) (1 + \log(\frac{1}{t}))^{\alpha} dt + \|f\|_1 (1 + \log \|f\|_1) + \|f\|_1
 \end{aligned}$$

となって $L \log^{\alpha} L \subset L^{1,1,\alpha}$ を得る。

また

$$E = \{t : t^*(t) > t^{-\frac{1}{2}}\} \quad \text{and} \quad F = [0, 1] \setminus E$$

とおけば,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} f^*(t) (1 + \log^+ \frac{1}{t})^{\alpha} dt \\
 &\leq \int_E f^*(t) (\log f^*(t)^2)^{\alpha} dt + \int_F t^{\frac{1}{2}} (1 + \log(\frac{1}{t}))^{\alpha} dt + \int_1^{\infty} f^*(t) dt \\
 &\leq C_1 \int_0^1 f^*(t) (1 + \log f^*(t)) + C_2 + \int_1^{\infty} f^*(t) dt
 \end{aligned}$$

となって $L \log^{\alpha} L \subset L^{1,1,\alpha}$ を得る。

Proposition 4.2. *Proposition 4.1 の条件下, (Ω, μ) 上の可測関数からなる次の2つの空間は一致し, さらにそのノルムは同等である。*

$$B_{\alpha} = \left\{ f : \|f\|_{B_{\alpha}} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} \mu(|f| > \alpha y) dy}{(1 + \log^+ r)^{\alpha}} \leq 1 \right\} < \infty \right\}$$

$$M_{(t(1+\log^+ t)^{-\alpha})} = \left\{ f : \|f\|_{M_{(t(1+\log^+ t)^{-\alpha})}} = \sup_{t>0} \left(\frac{t}{(1 + t \log^{\alpha} t)^{\alpha}} f^{**}(t) \right) < \infty \right\}$$

このことは, M.Carro が [3] で $\alpha = 1$ の場合について示しており, さらにその証明を良く読むと全く同じようにして一般の $\alpha > 0$ の場合がわかるので証明は省略する。

これらの結果を用いれば, (1.5) と (1.6) の同等性が得られる。

5. INTERPOLATION RESULT

この章では次の補間定理を証明する。

Theorem 5.1. (Ω, μ) を σ -有限な測度空間とする。 $1 < q < \infty$ を固定する。 T が $L \log L^\alpha + L^q(\Omega, \mu)$ 上で定義された作用素で

$$(1.1') \quad \left[\int_{\Omega} |Tf(x)|^q d\mu(x) \right]^{1/q} \leq A \left[\int_{\Omega} |f(x)|^q d\mu(x) \right]^{1/q} \quad \text{for any } f \in L^q(\Omega, \mu)$$

および

$$(1.6) \quad \sup_{r>0} \frac{\int_{\Omega} (|Tf(x)| - \frac{1}{r})_+ d\mu(x)}{(1 + \log^+ r)^\alpha} \leq C \int_{\Omega} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^\alpha d\mu(x)$$

を満たすならば

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & \int_{|Tf| \leq 1} |Tf(x)|^q d\mu(x) + \int_{|Tf| > 1} |Tf(x)| d\mu(x) \\ & \leq \frac{C_A}{(q-1)^\alpha} \left[\int_{|f| \leq 1} |f(x)|^q d\mu(x) + \int_{|f| > 1} |f(x)| (1 + \log |f(x)|)^\alpha d\mu(x) \right] \end{aligned}$$

が成り立つ。

Remark. 作用素 T が弱 L^1 有界性を持つならば、仮定 (1.4) が成り立つが逆は成り立たない。一方でこの定理の結論は S.Koizumi(小泉澄之) [6] と同じであることから、この結果は。

Proof. 証明の方針は [6] と同様である。最初に f を次のように分解する。

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & (\text{if } |f(x)| \leq 1) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \text{and put } h(x) = f(x) - g(x)$$

すると (1.1') より

$$(5.1) \quad \int_{|Tg| \leq 1} |Tg(x)|^q d\mu(x) \leq C \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu(x) = \int_{|f| \leq 1} |f(x)|^q d\mu(x),$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \int_{|Tg| > 1} |Tg(x)|^1 d\mu(x) & \leq C \int_{|Tg| > 1} |Tg(x)|^q d\mu(x) \\ & \leq \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu(x) = \int_{|f| \leq 1} |f(x)|^q d\mu(x) \end{aligned}$$

はすぐにわかる。

次に, (1.6) で $r = 1$ とすれば

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \int_{Th>1} |Th(x)| d\mu(x) &\leq C' \int_{\Omega} |h(x)|(1 + \log^+ |h(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \\ &= C' \int_{|f|>1} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \end{aligned}$$

となる。最後に (1.6) で $r > 1$ とすると

$$\frac{\int_{|Tf|>\frac{1}{r}} \Omega(|Tf(x)| - \frac{1}{r}) d\nu(x)}{(1 + \log^+ r)^{\alpha}} \leq C \int_{\Omega} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x)$$

となる。従って各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{e^{-n-1} < |Tf| \leq e^{-n}} |Tf(x)|^q d\mu(x) &\leq \int_{e^{-n-1} < |Tf| \leq e^{-n}} |Tf(x)| e^{-n(q-1)} d\mu(x) \\ &\leq C(1+n)^{\alpha} e^{-n(q-1)} \int_{\Omega} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。 n について和を取ると

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \int_{|Th| \leq 1} |Th(x)| d\mu(x) &\leq C' \int_{\Omega} |h(x)|(1 + \log^+ |h(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \\ &= C' \int_{|f| > 1} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{\alpha} d\mu(x) \end{aligned}$$

([7] 参照)。これらの評価 (5.1)(5.2)(5.3)(5.4) を下の Lemma 5.2 を用いて組み合わせれば

$$\begin{aligned} &\int_{|Tf| \leq 1} |Tf|^q d\mu + \int_{|Tf| > 1} |Tf| d\mu \\ &\leq \int_{|f| \leq 1} |f|^q d\mu + \int_{|f| > 1} |f|(1 + \log^+ |f|)^{\alpha} d\mu \end{aligned}$$

を得る。

Lemma 5.2(S.Koizumi[6]). $A \leq B + C$ かつ $A, B, C > 0$ とする。 $1 < q < \infty$ に対して

(i) $0 \leq A \leq 1$ ならば

$$A \leq \begin{cases} B + C, & \text{if } 0 \leq C \leq 1 \\ B + C^{\frac{1}{q}}, & \text{if } C > 1 \end{cases}$$

(ii) $A > 1$ ならば

$$A \leq \begin{cases} 2^q(B^q + C^q), & \text{if } 0 \leq C \leq 1 \\ 2^q(B^q + C) & \text{if } C > 1 \end{cases}$$

が成り立つ。

REFERENCES

1. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, 1988.
2. M. J. Carro, *New extrapolation estimates*, J. Func. Anal. **174** (2000), 155–166.
3. M. J. Carro, *On the range space of Yano's extrapolation theorem and new extrapolation estimates at infinity*, Publication Mathematiques, to appear.
4. M. J. Carro and J. Martin, *Extrapolation theory for the real interpolation method*, Collect.Math. (2002).
5. A. Gogatishvili and T. Sobukawa, *ON the extrapolation estimates*, Math. Ineq. Appl. (2002) (to appear).
6. S. Koizumi, *Contribution to the theory of interpolation of operatitons*, Osaka J. Math. **8** (1971), 135–149.
7. T. Sobukawa, *Extrapolation theorem on L^p -spaces over infinite measure space*, Mathematica Japonica **38** (1993), 781–789.
8. ———, *Extrapolation theorem on some quasi-banach spaces*, Tokyo J. Math. **18** (1995), 417–423.
9. ———, *Extrapolation theorem on quasi-normed L^p spaces*, Math. Japonica **43** (1996), 241–252.
10. S.Yano, *Notes on Fourier Analysis (XXIX):An Extrapolation Theorem*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951).

〒 700-8530 岡山大学教育学部数学教育講座 Department of Mathematics Education,
 Faculty of Education, Okayama University 3-1-1 Tsushima-naka Okayama 700-8530 Japan
 E-mail address: sobu@cc.okayama-u.ac.jp